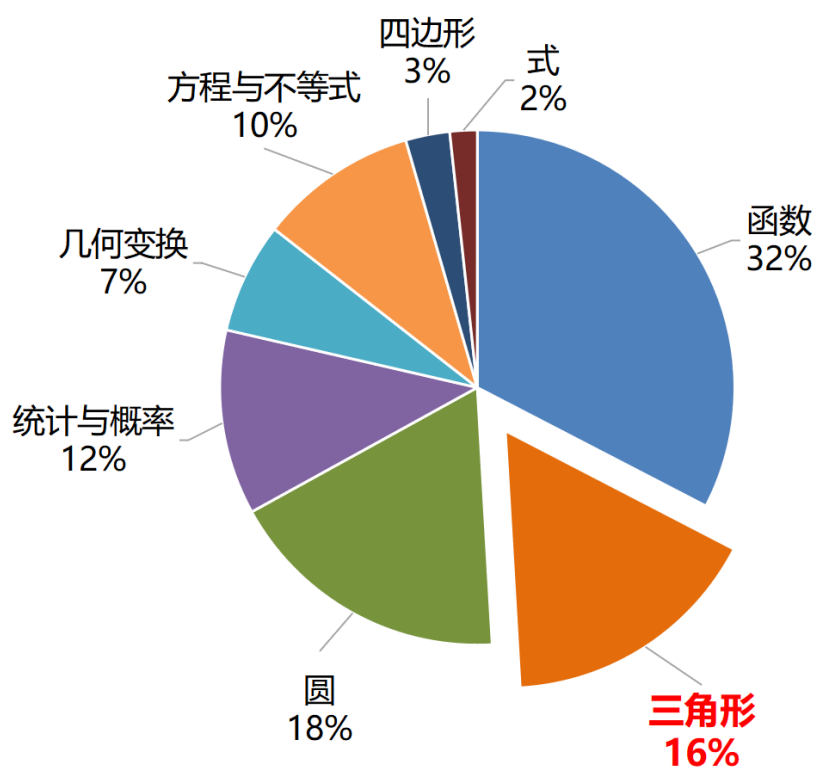


相似三角形进阶一

知己知彼



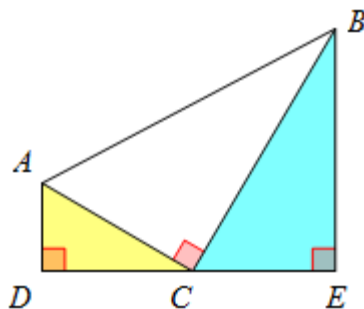


- ★相似三角形的性质与判定
- ★相似三角形的基本模型

一、三垂直及三等角模型综合

1. 一线三垂直

已知 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $AC \neq BC$ ， $AD \perp DE$ 于点 D ， $BE \perp DE$ 于点 E 。



【教法备注】

一线三垂直全等模型：

【核心考点】：

只要出现等腰直角三角形，可以过直角点作一条直线，然后过 45° 顶点作该直线的垂线，构造三垂直模型，必有如下全等三角形：

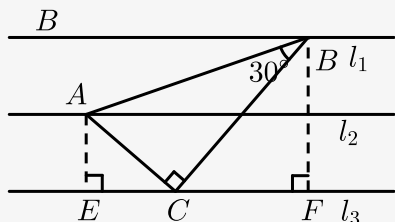
C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】过A、B作 $AE \perp l_3$ 于E，作 $BF \perp l_3$ 于F，

易得



$$\triangle AEC \sim \triangle CFB,$$

$$\frac{AC}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{设 } AE = a, \text{ 则 } BF = 2a,$$

$$\therefore \frac{EC}{BF} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore EC = \frac{\sqrt{3}}{3} BF = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2a = \frac{2\sqrt{3}}{3} a,$$

$$\text{在 Rt} \triangle AEC \text{ 中, } AE^2 + EC^2 = AC^2,$$

$$\text{即 } a^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} a \right)^2 = 1^2,$$

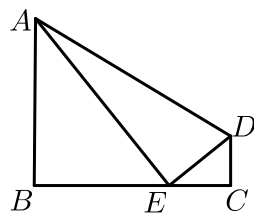
$$\because a > 0, \therefore a = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

故选C.

【标注】【知识点】一线三等角相似

练习

2. 如图， $AB \perp BC$ ， $DC \perp BC$ ，E是BC上一点，使得 $AE \perp DE$ 。



(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle ECD$ 。

(2) 若 $AB = 4$ ， $AE = BC = 5$ ，求ED的长。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) ED = \frac{5}{2}.$$

【解析】(1) $\because AB \perp BC, DC \perp BC,$

$$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ, \angle BAE + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp DE,$$

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ECD.$$

(2) $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB = 4, AE = 5,$

$$\therefore BE = \sqrt{AE^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\because BC = 5,$$

$$\therefore EC = 5 - 3 = 2,$$

由 (1) 得, $\triangle ABE \sim \triangle ECD,$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{EC}{ED},$$

$$\therefore \frac{4}{5} = \frac{2}{ED},$$

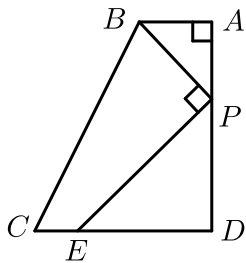
$$\therefore ED = \frac{5}{2}.$$

例题

【知识点拨】

利用三垂直相似来进行综合应用及计算, 与动点结合, 同时包含特殊四边形的判定

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, \angle A = 90^\circ, AB = 2, AD = 5, P$ 是 AD 上一动点 (点 P 不与 A, D 重合), $PE \perp BP, PE$ 交 DC 于点 E .



(1) 求证: $\triangle ABP \sim \triangle DPE$.

(2) 设 $AP = x, DE = y$, 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出 x 的取值范围.

(3) 请你探索在点 P 运动的过程中, 四边形 $ABED$ 能否构成矩形? 如果能, 求出 AP 的长; 如果不能, 请说明理由.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x \quad (0 < x < 5).$$

(3) 能构成矩形, AP 的长为1或4.

【解析】(1) $\because \angle A = 90^\circ$,

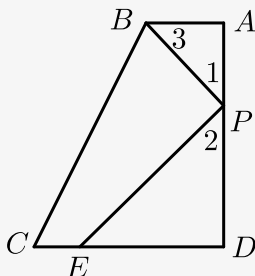
$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ.$$

$$\because PE \perp BP,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2.$$

$$\because AB \parallel CD, \angle A = 90^\circ$$



$$\therefore \angle D = \angle A = 90^\circ.$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle DPE.$$

(2) 由 $\triangle ABP \sim \triangle DPE$ 可得 $\frac{AB}{DP} = \frac{AP}{DE}$,

$$\because AB = 2, AD = 5, AP = x, DE = y,$$

$$\therefore DP = 5 - x.$$

$$\therefore \frac{2}{5-x} = \frac{x}{y}.$$

$$\text{整理, 得 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x \quad (0 < x < 5).$$

(3) 能构成矩形.

当 $DE = AB = 2$ 时, 四边形 $ABED$ 构成矩形.

$$\text{即 } DE = y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x = 2.$$

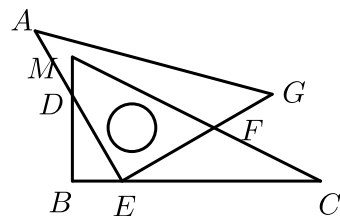
$$\text{解得 } x = 1 \text{ 或 } x = 4,$$

$$\therefore AP \text{ 的长为 } 1 \text{ 或 } 4.$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

练习

4. 一副三角板 ($\triangle BCM$ 和 $\triangle AEG$) 如图放置, 点 E 在 BC 上滑动, AE 交 BM 于 D , EG 交 MC 于 F , 且在滑动过程中始终保持 $EF = DE$. 若 $MB = 4$, 设 $BE = x$, $\triangle EFC$ 的面积为 y , 则 y 关于 x 的函数表达式是 ().



A. $y = 2\sqrt{3}x$

B. $y = 2\sqrt{3}x + 1$

C. $y = x(4\sqrt{3} - x)$

D. $y = \frac{1}{2}x(4\sqrt{3} - x)$

【答案】 D

【解析】 作 $FH \perp EC$ 于点 H ，如图所示，

$$\text{则 } \angle FHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEH + \angle EFH = 90^\circ$$

$$\because \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEB + \angle FEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFH = \angle DEB,$$

在 $\triangle DEB$ 和 $\triangle EFH$ 中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle FHE \\ \angle DEB = \angle EFH \\ DE = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DEB \cong \triangle EFH (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = HF,$$

$$\because BE = x,$$

$$\therefore HF = x,$$

$$\because MB = 4, \angle B = 90^\circ, \angle C = 30^\circ,$$

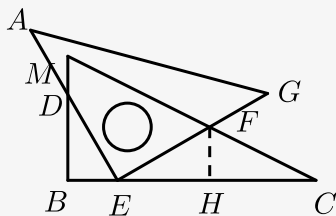
$$\therefore BC = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore EC = BC - BE = 4\sqrt{3} - x,$$

$$\therefore \triangle EFC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}x(4\sqrt{3} - x),$$

$$\text{即 } y = \frac{1}{2}x(4\sqrt{3} - x),$$

故选：D.

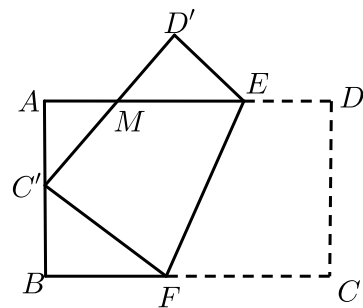


【标注】 【知识点】 根据题意列函数关系式

【重点强调】

2018-2019学年10月天津南开区南开翔宇学校初三上学期月考第10题

5. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠，使顶点 C 恰好落在 AB 边的中点 C' 上，点 D 落在 D' 处， $C'D'$ 交 AE 于点 M ．若 $AB = 6$ ， $BC = 9$ ，则 AM 的长为 _____．



【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】 根据折叠的性质可知， $FC = FC'$ ， $\angle C = \angle FC'M = 90^\circ$ ，

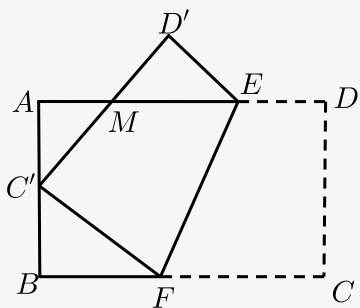
设 $BF = x$ ，则 $FC = FC' = 9 - x$ ，

$$\therefore BF^2 + BC'^2 = FC'^2,$$

$$\therefore x^2 + 3^2 = (9 - x)^2, \text{ 解得: } x = 4,$$

$$\therefore \angle FC'M = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'M + \angle BC'F = 90^\circ,$$



$$\text{又} \because \angle BFC' + \angle BC'F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'M = \angle BFC',$$

$$\because \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AMC' \sim \triangle BC'F,$$

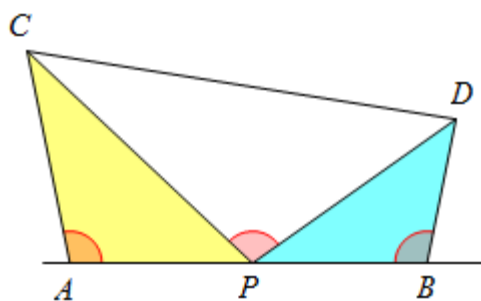
$$\therefore \frac{AC'}{BF} = \frac{AM}{BC'},$$

$$\therefore BC' = AC' = 3,$$

$$\therefore AM = \frac{9}{4}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

2. 一线三等角



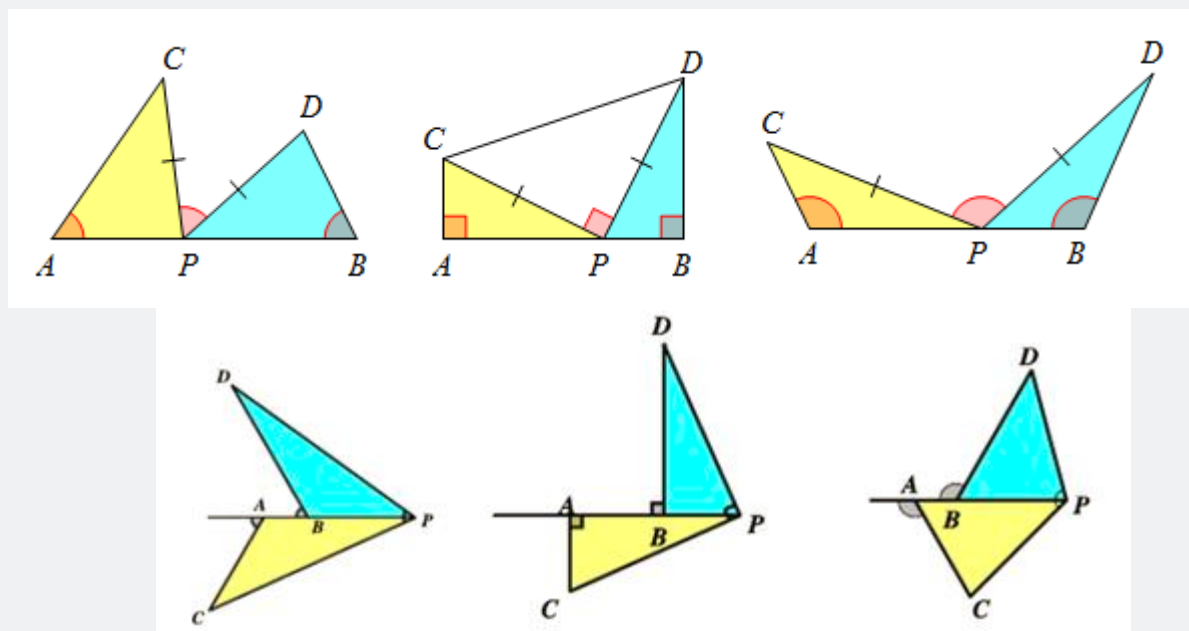
【教法备注】

一线三等角全等模型：

【核心考点】：

只要在同一条直线上出现三个角相等，一般都可以构造全等三角形解决问题。

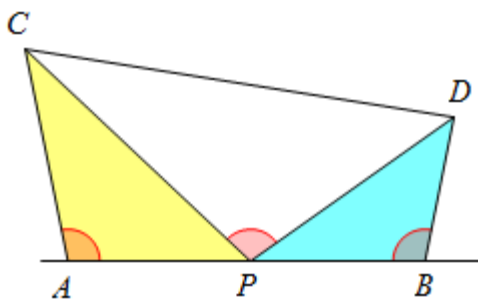
【经典图形】：



【教法备注】

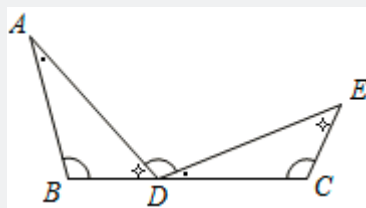
根据上面的证明，你能试着证明下图中两个三角形的关系吗？

已知 $\angle CAP = \angle CPD = \angle PBD$ ，且 $PC \neq PD$ 。



【知识点拨】

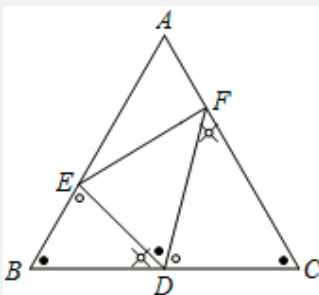
“一线三等角”相似模型：



如图，已知 $\angle ABC = \angle ADE = \angle C$ ，则 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ 。

【教法备注】

以等腰三角形为背景的“一线三等角”相似模型：



(1) 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = \angle EDF = \angle C$ ，则 $\triangle EBD \sim \triangle DCF$ 。

(2) 特别地，若点D是BC的中点，那么还有 $\triangle EBD \sim \triangle DCF \sim \triangle EDF$ 。

证明：

当点D是BC中点时，已知 $\triangle EBD \sim \triangle DCF$ ，

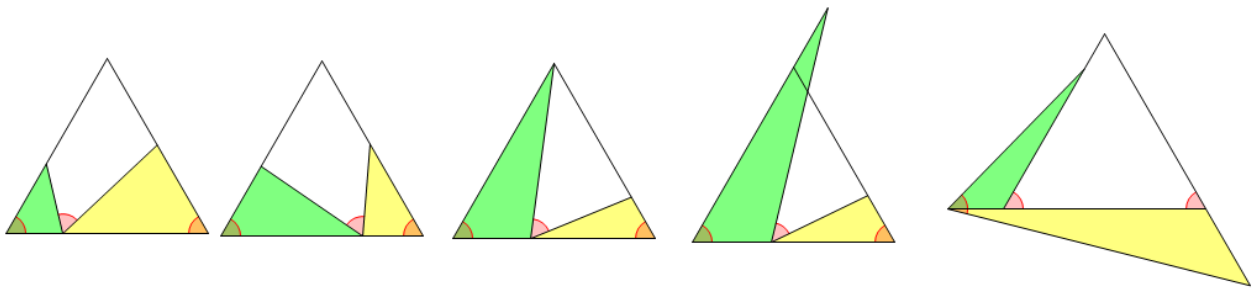
$$\therefore \frac{BE}{CD} = \frac{DE}{FD} ,$$

又 $\because BD = CD$ ，

$$\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{DE}{DF} ,$$

又 $\because \angle B = \angle EDF$ ，可得 $\triangle EBD \sim \triangle EDF$ 。

【经典图形】

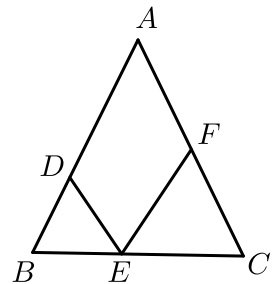


例题

【知识点拨】

利用等腰三角形及等腰三角形的性质，构造出相似三角形；同时利用相似三角形的性质，反求对应的线段长度

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 6$ ， $BC = 5$ ， D 是 AB 上一点， $BD = 2$ ， E 是 BC 上一动点，连接 DE ，并作 $\angle DEF = \angle B$ ，角的一边 EF 交线段 AC 于 F 。



- (1) 求证： $\triangle DBE \sim \triangle ECF$ 。
- (2) 当 F 是线段 AC 中点时，求线段 BE 的长。
- (3) 连接 DF ，如果 $\triangle DFE \sim \triangle DEB$ ，求 FC 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $BE = 2$ 或 3 。

(3) $FC = \frac{25}{8}$ 。

【解析】(1) $\because \angle B + \angle DEB + \angle BDE = 180^\circ$

$$\angle DEB + \angle DEF + \angle FEC = 180^\circ$$

$$\text{又} \because \angle DEF = \angle B$$

$$\therefore \angle BDE = \angle FEC$$

$$\because AB = AC$$

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CEF.$$

(2) 设 $BE = x$ ，则 $CE = 5 - x$ ，

由(1)得, $\triangle BDE \sim \triangle CEF$,

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{BE}{CF},$$

$$\text{即 } \frac{2}{5-x} = \frac{x}{3},$$

得 $x = 2$ 或 3 ,

经检验, $x = 2$ 或 $x = 3$ 是原分式方程的解,

$\therefore BE = 2$ 或 3 .

(3) 若 $\triangle DFE \sim \triangle DEB$

前面已经证得 $\triangle DEB \sim \triangle EFC$

$\therefore \triangle DFE \sim \triangle DEB \sim \triangle EFC$

$\therefore \angle BDE = \angle FEC = \angle EDF$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{BD}{BE}, \frac{DE}{EF} = \frac{BD}{CE}$$

$\therefore BE = CE$

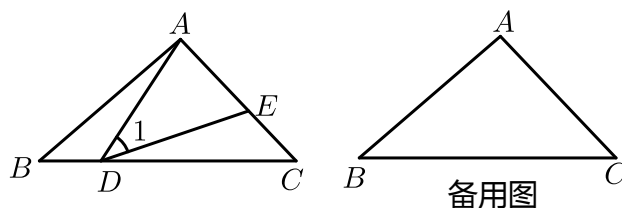
$\therefore E$ 是 BC 中点, $BE = CE = \frac{5}{2}$

$\therefore BD : EC = BE : CF$, 即 $2 : \frac{5}{2} = \frac{5}{2} : FC$

$\therefore FC = \frac{25}{8}$.

【标注】【知识点】相似三角形中的动点问题

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别在边 BC 、 AC 上, 连接 AD 、 DE , 且 $\angle 1 = \angle B = \angle C$.



(1) 由题设条件, 请写出三个正确结论: (要求不再添加其他字母和辅助线, 找结论过程中添加的字母和辅助线不能出现在结论中, 不必证明)

答: 结论一: _____.

结论二: _____.

结论三: _____.

(2) 若 $\angle B = 45^\circ$, $BC = 2$, 当点 D 在 BC 上运动时 (点 D 不与 B 、 C 重合),

① 求 CE 的最大值.

② 若 $\triangle ADE$ 是等腰三角形, 求此时 BD 的长.

(注意: 在第(2)的求解过程中, 若有运用(1)中得出的结论, 须加以证明)

【答案】(1) $AB = AC$; $\angle AED = \angle ADC$; $\triangle ADE \sim \triangle ACD$.

(2) ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

② 1 或 $2 - \sqrt{2}$.

【解析】(1) $AB = AC$, $\angle AED = \angle ADC$, $\triangle ADE \sim \triangle ACD$.

(2) ① $\because \angle B = \angle C$, $\angle B = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ACB$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle C, \angle DAE = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore AD : AC = AE : AD, \text{ 即 } AD^2 = AE \cdot AC,$$

$$\therefore AE = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AD^2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AD^2,$$

当 AD 最小时, AE 最小, 此时 $AD \perp BC$, $AD = \frac{1}{2} BC = 1$,

$$\therefore AE \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1^2 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore CE \text{ 的最大值} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

② 当 $AD = AE$ 时,

$$\therefore \angle 1 = \angle AED = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 D 与 B 重合, 不合题意舍去,

当 $EA = ED$ 时, 如图1,

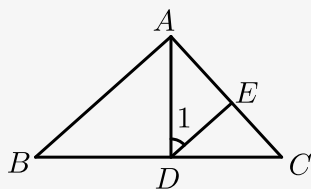


图 1

$$\therefore \angle EAD = \angle 1 = 45^\circ,$$

$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore AD \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore BD = 1,$$

当 $DA = DE$ 时, 如图2,

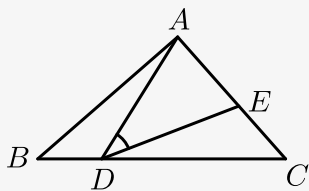


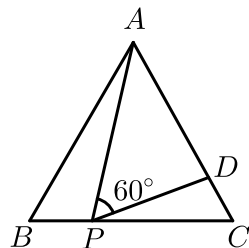
图 2

$$\begin{aligned}
 &\because \angle 1 = \angle C, \angle DAE = \angle CAD \\
 &\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD, \\
 &\therefore DA : AC = DE : DC, \\
 &\therefore DC = CA = \sqrt{2}, \\
 &\therefore BD = BC - DC = 2 - \sqrt{2}, \\
 &\therefore \text{综上所述, 当 } \triangle ADE \text{ 是等腰三角形时, } BD \text{ 的长为 } 1 \text{ 或 } 2 - \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形中的动点问题

练习

8. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, P 为 BC 上一点, D 为 AC 上一点, $\angle APD = 60^\circ$, $BP = 1$, $CD = \frac{2}{3}$.



- (1) 证明: $\triangle PCD \sim \triangle ABP$.
 (2) 求: $\triangle ABC$ 的周长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 9.

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle DCP = \angle PBA = 60^\circ.$$

$$\because \angle APC = \angle APD + \angle DPC = \angle BAP + \angle ABP, \angle APD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAP = \angle CPD.$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD.$$

(2) 设 $\triangle ABC$ 的边长为 x ,

$$\because \triangle ABP \sim \triangle PCD,$$

$$\therefore \frac{BP}{DC} = \frac{AB}{PC},$$

$$\therefore \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{x}{x-1} .$$

$$\therefore x = 3 .$$

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 9 .

【标注】【知识点】一线三等角相似

9. 解答下列问题 .

(1) 如图1, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 为 AB 上一点, $\angle DPC = \angle A = \angle B = 90^\circ$. 求证:

$$AD \cdot BC = AP \cdot BP .$$

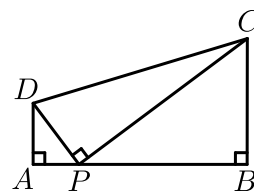


图1

(2) 如图2, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 为 AB 上一点, 当 $\angle DPC = \angle A = \angle B = 40^\circ$ 时, 求证:

$$AD \cdot BC = AP \cdot BP .$$

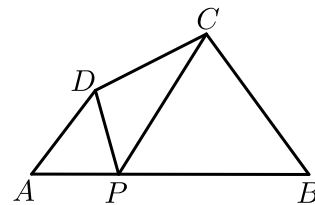


图2

(3) 如图3, 在 $\triangle ABD$ 中, $AB = 6$, $AD = BD = 5$, 且满足 $\angle DPC = \angle A$. 求证:

$$AD \cdot BC = AP \cdot BP .$$

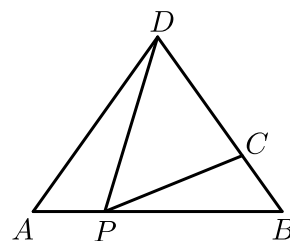


图3

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

(3) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because \angle DPC = \angle A = \angle B = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ADP + \angle APD = 90^\circ, \angle BPC + \angle APD = 90^\circ,$$

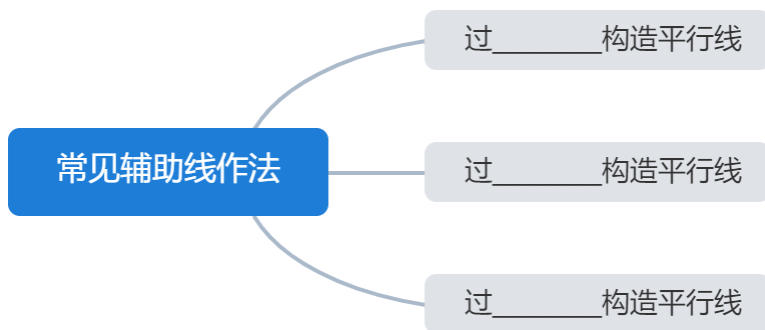
$$\begin{aligned} \therefore \angle ADP &= \angle BPC, \\ \therefore \triangle ADP &\sim \triangle BPC, \\ \therefore \frac{AD}{BP} &= \frac{AP}{BC}, \\ \therefore AD \cdot BC &= AP \cdot BP. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \therefore \angle DPC &= \angle A = \angle B = 40^\circ, \\ \therefore \angle ADP + \angle APD &= 140^\circ, \angle BPC + \angle APD = 140^\circ, \\ \therefore \angle ADP &= \angle BPC, \\ \therefore \triangle ADP &\sim \triangle BPC, \\ \therefore \frac{AD}{BP} &= \frac{AP}{BC}, \\ \therefore AD \cdot BC &= AP \cdot BP. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \therefore AD &= BD, \\ \therefore \angle A &= \angle B, \\ \therefore \angle DPC &= \angle A, \\ \therefore \angle DPC &= \angle A = \angle B, \\ \therefore \angle ADP + \angle APD &= 180^\circ - \angle A, \angle BPC + \angle APD = 180^\circ - \angle DPC, \\ \therefore \angle ADP &= \angle BPC, \\ \therefore \triangle ADP &\sim \triangle BPC, \\ \therefore \frac{AD}{BP} &= \frac{AP}{BC}, \\ \therefore AD \cdot BC &= BP \cdot AP. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

二、相似三角形常用辅助线



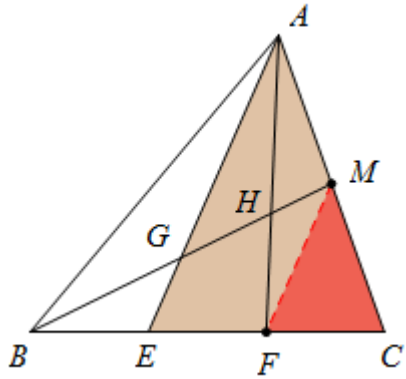
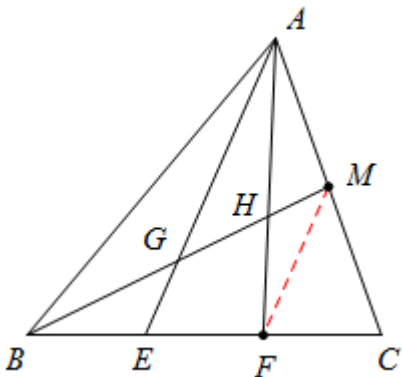
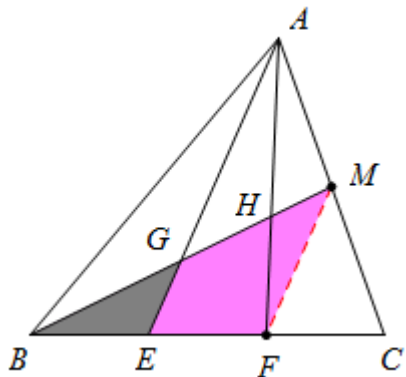
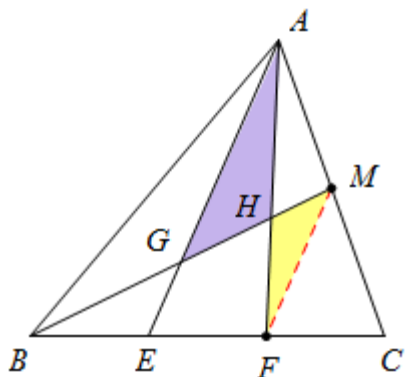
【教法备注】

掌握作平行构造相似的方法，能解决作平行构造相似的题目。
 主要分为过中点构造，过断点构造，过顶点构造三种常见方法

1. 连中点构造相似

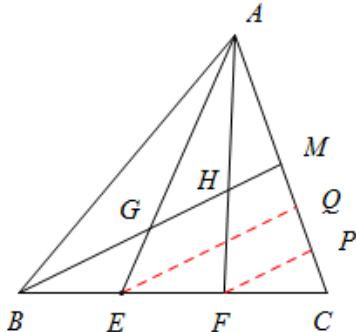
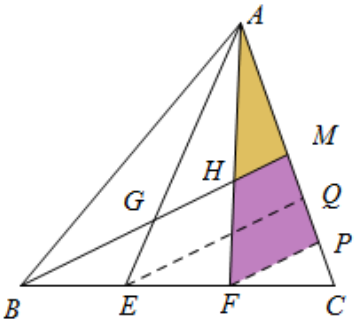
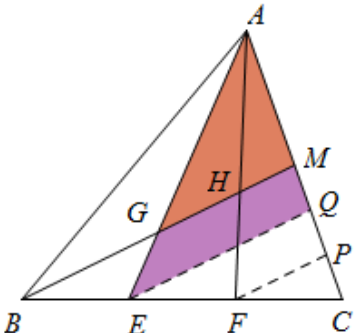
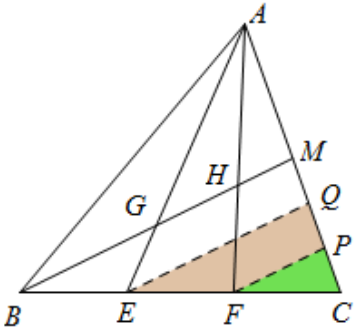
方法一

通过中点，构造中位线，找平行，出相似。

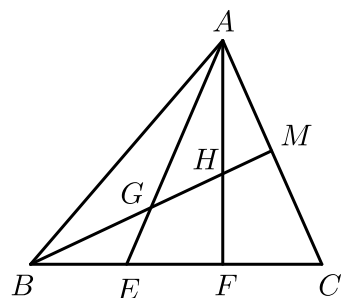
连接 MF ，构造中位线	得到的“A”字或“8”字相似
	
	
	

方法二

由三等分点构造平行线分线段成比例，找线段间的关系．

过点 E 、 F 作 MB 的平行线	目的	得到相似模型
	确定 HM 和 PF 的关系	
	确定 GM 和 PF 的关系	
	确定 BM 和 PF 的关系	

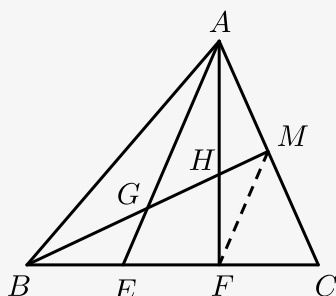
10. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， E 、 F 为 BC 的三等分点， M 为 AC 的中点， BM 与 AE 、 AF 分别交于 G 、 H ，求 $BG : GH : HM$ 的值。



【答案】 $5 : 3 : 2$.

【解析】 连接 FM ，则易得 FM 为 $\triangle AEC$ 的中位线，

$$\therefore MF \parallel AE, AE = 2MF,$$



$$\therefore \frac{GE}{MF} = \frac{BG}{BM} = \frac{BE}{BF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore GE = \frac{1}{2}MF, BG = GM = \frac{1}{2}BM,$$

$$\therefore AG = AE - GE = \frac{3}{2}MF,$$

$$\therefore \frac{MH}{HG} = \frac{MF}{AG} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore HM = \frac{2}{5}GM = \frac{1}{5}BM,$$

$$\therefore GH = \frac{3}{10}BM,$$

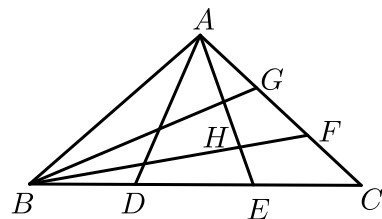
$$\therefore BG : GH : HM = \frac{1}{2}BM : \frac{3}{10}BM : \frac{1}{5}BM = 5 : 3 : 2.$$

故答案为： $5 : 3 : 2$.

【标注】 【知识点】平行线分线段成比例定理

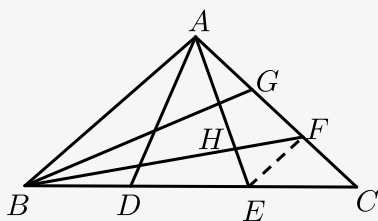
练习

11. 如图所示， $\triangle ABC$ 的面积为3， D 、 E 、 F 、 G 分别是 BC 、 AC 边上的三等分点， AE 、 BF 相交于点 H ，则四边形 $CEHF$ 的面积是 _____ .



【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 连接 EF ,



$\because D, E$ 是 BC 的三等分点, G, F 是 AC 的三等分点,

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{1}{3}, \frac{CF}{AC} = \frac{1}{3},$$

又 $\because \angle C = \angle C$,

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle ABC, \frac{EF}{AB} = \frac{CF}{AC} = \frac{1}{3}, S_{\triangle CEF} = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle EFH \sim \triangle ABH,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EFH}}{S_{\triangle ABH}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\therefore S_{\triangle ABH} = 9S_{\triangle EFH}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABH} + S_{\triangle BCF} + S_{\triangle AEC} - (S_{\triangle EFH} + S_{\triangle CEF}) = S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore 9S_{\triangle EFH} + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 3 - S_{\triangle EFH} - \frac{1}{3} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle EFH} = \frac{1}{6},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} CEFH} = S_{\triangle EFH} + S_{\triangle CEF} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

【标注】 【知识点】 相似三角形的性质与判定综合

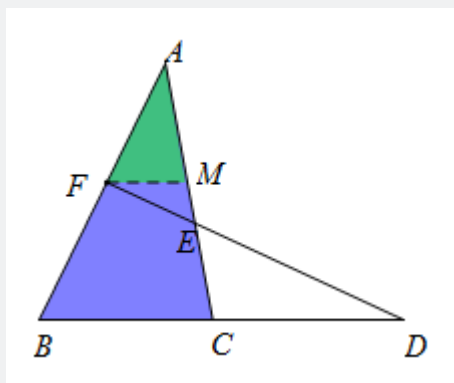
2. 过断点作平行

例题

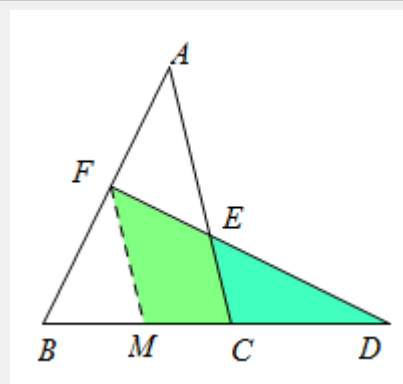
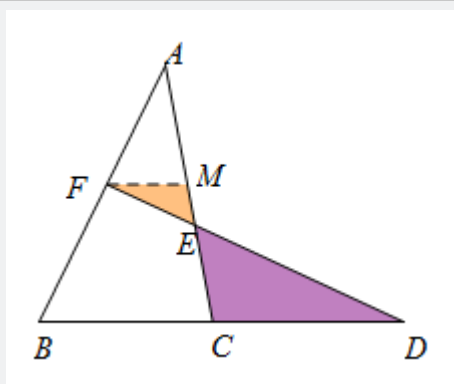
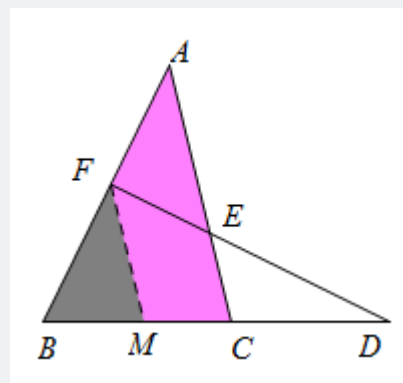
方法一

过“断点” F 作四条线段中不过点 F 的两条的线段的平行线

解法一过点 F 作线段 BD 的平行线



解法二过点 F 作线段 AC 的平行线

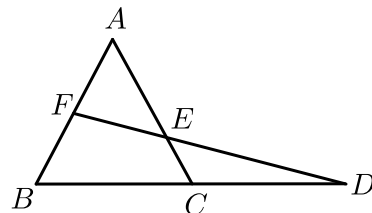


方法二

过“断点” C 作四条线段中不过点 C 的两条的线段的平行线。

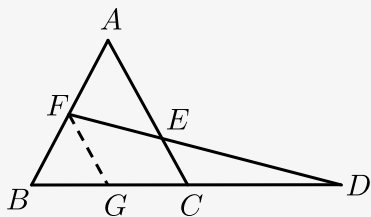
自己试着证明一下。

12. 如图，延长 $\triangle ABC$ 的边 BC 到点 D ，使 $BC = CD$ ，取 AB 的中点 F ，连接 DF 交 AC 于点 E 。求 $EC : AC$ 的值。



【答案】 $EC : AC = 1 : 3$.

【解析】 取 BC 的中点 G ，则 $CG = \frac{1}{2}BC$ ，连接 GF ，



又 $\because F$ 为 AB 的中点，

$\therefore FG \parallel AC$ ，且 $FG = \frac{1}{2}AC$ ，

即 $EC \parallel FG$ ，

$\therefore \triangle DEC \sim \triangle DFG$ ，

$\therefore \frac{EC}{FG} = \frac{DC}{DG}$ ，

$\because CG = \frac{1}{2}BC$ ， $DC = BC$ ，

设 $CG = k$ ，那么 $DC = BC = 2k$ ， $DG = 3k$ ，

$\therefore \frac{EC}{FG} = \frac{DC}{DG} = \frac{2}{3}$ ，

即 $EC = \frac{2}{3}FG$ ，

$\because FG = \frac{1}{2}AC$ ，

$\therefore EC = \frac{1}{3}AC$ ，即 $EC : AC = 1 : 3$ 。

【标注】【知识点】相似A字型

【重点强调】

因为本题也是在探索线段间的比例关系，所以很容想到相似，可以通过题目中给出的中点确定相似三角形之间的相似比。本题中点 C 、 E 、 F 是图中的四条线段 AB 、 AC 、 BD 、 DF 相交产生的点，特点是这三个点均位于线段上，将整条线段分成两部分，即断开了两条线段，称为“断点”。

通过“断点”作平行，利用平行线分线段成比例或构造“A”字“8”字模型可以求出线段间的关系。

练习

13. 已知：线段 $OA \perp OB$ ， C 点为线段 OB 上一点， D 为线段 OA 上一点，连接 AC ， BD 交于点 P 。

(1) 如图1，当 $OA = OB$ ，且 C 、 D 分别为线段 OB 、 OA 的中点时，则 $\frac{AP}{PC}$ 的值为_____。

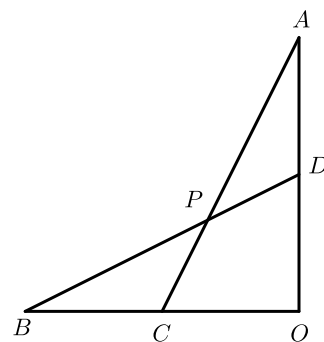


图1

(2) 如图2, 当 $OA = OB$, C 为线段 OB 的中点, 且 $\frac{AD}{AO} = \frac{1}{3}$ 时, 求 $\frac{AP}{PC}$ 的值.

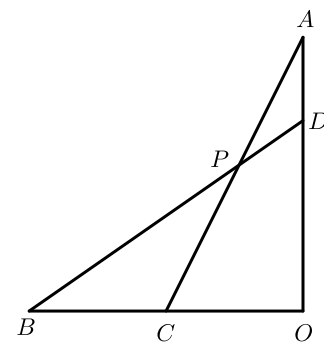


图2

(3) 如图3, 当 $\frac{AD}{AO} = \frac{1}{n} (n > 1)$, $\frac{BC}{BO} = \frac{1}{m}$ 时, 直接写出 $\frac{AP}{PC}$ 的值. (用 m, n 表示)

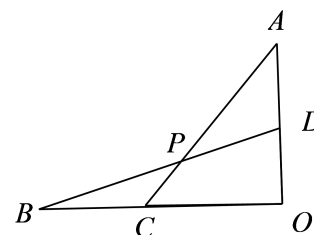


图3

【答案】 (1) 2

(2) $\frac{AP}{PC} = 1$.

(3) $\frac{m}{n-1}$.

【解析】 (1) 过点 C 作 $CE \parallel BD$ 交 AO 于点 E , 如图1所示,

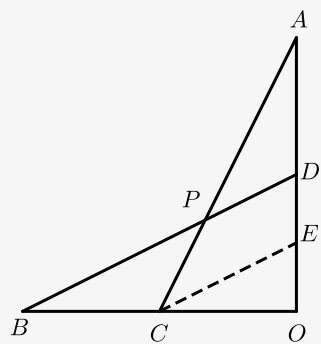


图1

$$\begin{aligned}
 &\because \text{点} C \text{ 为 } OB \text{ 中点}, \\
 &\therefore CE \text{ 为 } \triangle OBD \text{ 的中位线}, \\
 &\therefore DE = OE, \\
 &\because PD \parallel CE, \\
 &\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{AD}{DE}, \\
 &\therefore \frac{AP}{AD} = \frac{1}{2}, \\
 &\therefore AD = DO, \\
 &\therefore AD = 2DE, \\
 &\therefore \frac{AP}{PC} = 2.
 \end{aligned}$$

(2) 过点 C 作 $CE \parallel BD$ 交 AO 于点 E , 如图2所示,

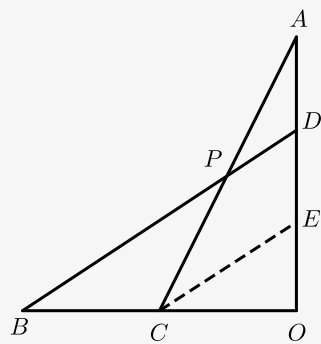


图2

$$\begin{aligned}
 &\because \text{点} C \text{ 为 } OB \text{ 中点}, \\
 &\therefore CE \text{ 为 } \triangle OBD \text{ 的中位线}, \\
 &\therefore DE = OE, \\
 &\because PD \parallel CE, \\
 &\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{AD}{DE}, \\
 &\therefore \frac{AP}{AD} = \frac{1}{3}, \\
 &\therefore DO = 2AD, \\
 &\therefore 2DE = 2AD, \\
 &\therefore AD = DE,
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{AP}{PC} = 1.$$

(3) 过点C作CE//BD交AO于点E, 如图3所示,

$\because CE//BD,$

$\therefore \triangle COE \sim \triangle BOD, \triangle APD \sim \triangle ACE,$

$$\therefore \frac{CO}{BO} = \frac{EO}{DO}, \frac{AP}{AC} = \frac{AD}{AE},$$

$$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{1}{m-1},$$

$$\therefore \frac{BO}{EO} = \frac{m}{m-1},$$

$$\therefore \frac{DO}{DE} = \frac{1}{m},$$

$$\therefore \frac{DO}{AD} = \frac{1}{n},$$

$$\therefore \frac{AO}{AD} = \frac{n-1}{1},$$

$$\therefore \frac{DO}{AP} = \frac{n-1}{AD},$$

$$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{AD}{DE},$$

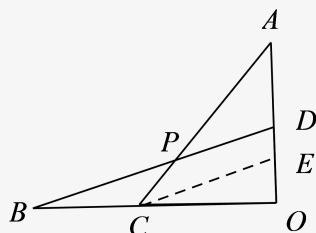


图3

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AD}{DE} = \frac{AD}{DO} \cdot \frac{DO}{DE} = \frac{1}{n-1} \cdot m = \frac{m}{n-1}.$$

【标注】【知识点】相似模型的构造和应用

3. 过顶点作平行

例题

14. 阅读下面材料：

某同学遇到这样一个问题：如图1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，BE是AC边上的中线，点D在BC边上， $CD:BD = 1:2$ ，AD与BE相交于点P，求 $\frac{AP}{PD}$ 的值。

他发现，过点A作AF//BC，交BE的延长线于点F，通过构造 $\triangle AEF$ ，经过推理和计算能够使问题得到解决（如图2）。

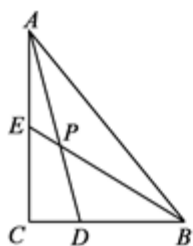


图1

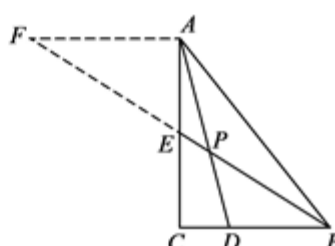


图2

请回答：

(1) $\frac{AP}{PD}$ 的值为_____。

(2) 参考这个同学思考问题的方法，解决问题：

如图3，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 在 BC 的延长线上， AD 与 AC 边上的中线 BE 的延长线交于点 P ， $DC : BC : AC = 1 : 2 : 3$ 。

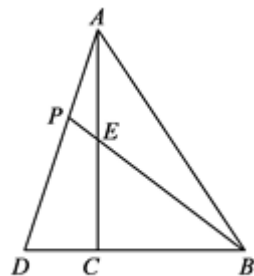


图 3

- ① 求 $\frac{AP}{PD}$ 的值。
 ② 若 $CD = 2$ ，则 $BP =$ _____。

【答案】 (1) $\frac{3}{2}$
 (2) ① $\frac{2}{3}$
 ② 6

【解析】 (1) 过点 A 作 $AF \parallel BC$ ，交 BE 的延长线于点 F ，

设 $DC = k$ ，
 $\because CD : BD = 1 : 2$ ，
 $\therefore BD = 2k$ ，
 $\therefore BC = DC + BD = 3k$ ，
 $\because E$ 是 AC 中点，
 $\therefore AE = CE$ ，
 $\because AF \parallel BC$ ，
 $\therefore \angle F = \angle CBE$ 。
 又 $\because \angle AEF = \angle CEB$ ，
 $\therefore \triangle AEF \cong \triangle CEB$ 。
 $\therefore AF = BC = 3k$ 。
 $\because AF \parallel DB$ ，
 $\therefore \triangle AFP \sim \triangle DBP$ 。
 $\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{AF}{DB}$ ，
 $\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{3}{2}$ 。

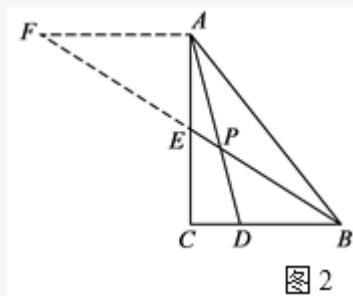
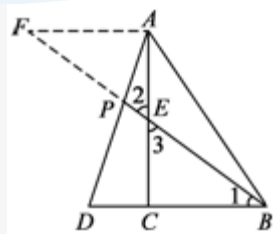


图 2

- (2) ① 过点 A 作 $AF \parallel BC$ ，交 BP 的延长线于点 F ，
 依题可知，

$$\begin{aligned} \triangle AEF &\cong \triangle CEB, \\ \therefore AF &= BC, \\ \therefore DC : BC : AC &= 1 : 2 : 3, \\ \therefore \triangle AFP &\sim \triangle DBP, \\ \therefore \frac{AP}{PD} &= \frac{AF}{BD} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \therefore CD &= 2, DC : BC : AC = 1 : 2 : 3, \\ \therefore BC &= 4, AC = 6, \\ \therefore AE &= CE = 3, \\ \text{在 Rt}\triangle BCE \text{ 中, } BE &= \sqrt{CE^2 + BC^2} = 5, \\ \therefore \triangle AEF &\cong \triangle CEB, \\ \therefore AF &= BC = 4, EF = BE = 5, \\ \therefore \triangle AFP &\sim \triangle DBP, \\ \therefore \frac{AP}{PD} &= \frac{FP}{BP} = \frac{2}{3}, \\ \therefore BP &= \frac{3}{5} \times 10 = 6. \end{aligned}$$

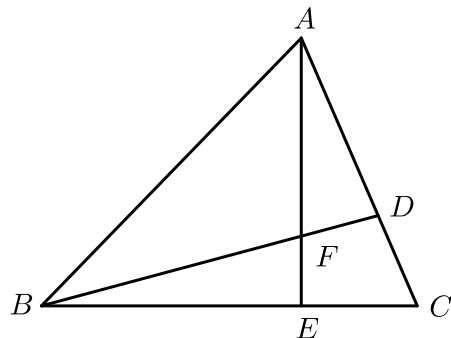
【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

【重点强调】

本题是通过过顶点作三角形一边的平行得到“8”字模型，那么除了点A，过点B或点C作平行能解决这个题目吗，你还有其他方法吗？

练习

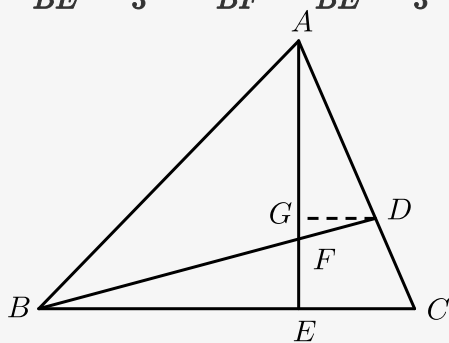
15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点D、E分别为边AC、BC上靠近点C的三等分点，BD、AE交于点F，求 $DF : BF$ 的值。



【答案】 $\frac{1}{3}$ 。

【解析】作 $DG \parallel CB$ 交AE于点G

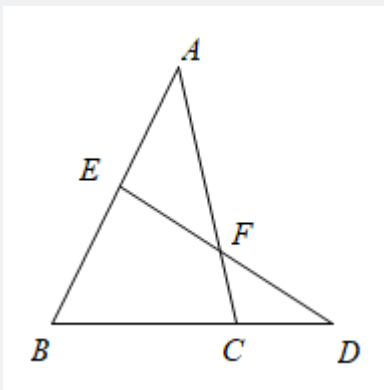
$$\text{则 } \frac{DG}{CE} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}, \text{ 又 } \because \frac{CE}{BE} = \frac{1}{2}, \\ \therefore \frac{DG}{BE} = \frac{1}{3}, \therefore \frac{DF}{BF} = \frac{DG}{BE} = \frac{1}{3}.$$



【标注】【知识点】比例的综合应用

【知识总结】

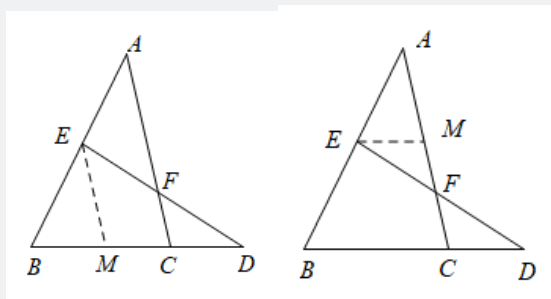
已知 E 、 F 、 C 三点中任意两点的等分情况，可求另一点的等分情况



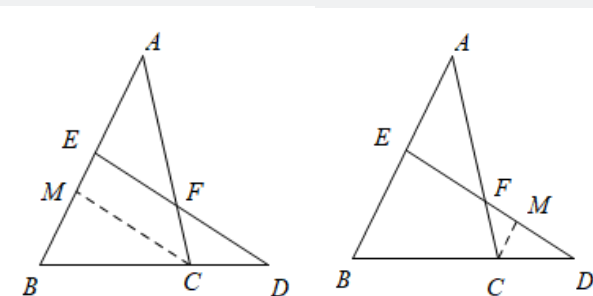
特点：四线 AB 、 AC 、 DE 、 BD ；三点 E 、 F 、 C

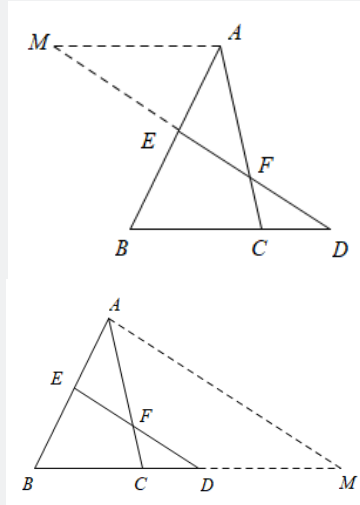
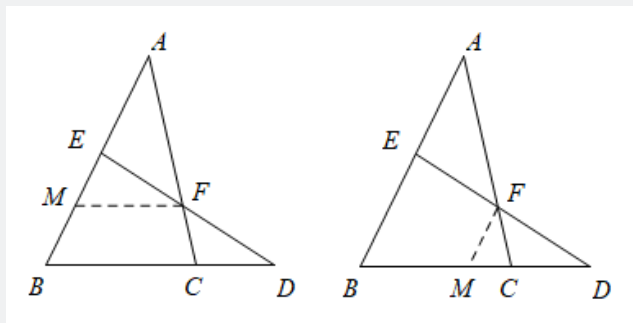
辅助线

过断点或顶点作平行，构造“ A ”字或“ 8 ”字模型

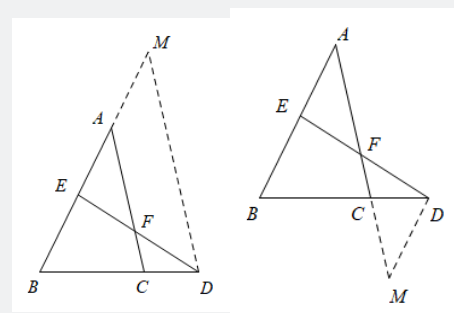
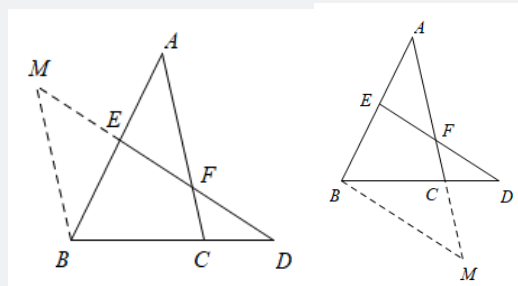


过断点作平行（断开线段的点）





过顶点作平行



【教法备注】让学生对此题进行课下证明

证明三角形的重心分中线所成的两段线段之比为1 : 2 .

已知 AD 、 BE 、 CF 分别是边 BC 、 AC 、 AB 上的中线，点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，求证

$$\frac{DO}{AO} = \frac{FO}{CO} = \frac{EO}{BO} = \frac{1}{2}.$$

